2019年度　東京都公立高校入試問題

50分
100点

（注）　答えに分数が含まれるときは，それ以上約分できない形で表しなさい。

答えに根号が含まれるときは，根号の中を最も小さい自然数にしなさい。

［　　］の中の数字を答える問題については，「あ，い，う，…」に当てはまる数字を，下の〔例〕のように，0から9までの数字のうちから，それぞれ1つずつ選びなさい。

〔例〕 ［あい］に12と答えるとき　あ（ 1 ）　い（ 2 ）

1　次の各問に答えよ。

〔問1〕 $5+\frac{1}{2}\times(-8)$ を計算せよ。

〔問2〕 $4(a-b)-(a-9b)$ を計算せよ。

〔問3〕 $(\sqrt{7}-1)^2$ を計算せよ。

〔問4〕 一次方程式 $4x+6=5(x+3)$ を解け。

〔問5〕 連立方程式 $\begin{cases} -x+2y=8 \\ 3x-y=6 \end{cases}$ を解け。

〔問6〕 二次方程式 $x^2+x-9=0$ を解け。

〔問7〕 次の［　　］の中の「あ」「い」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。

図1

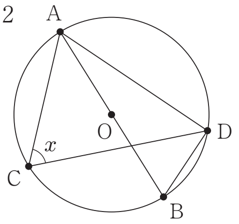
右の図1のように，1，2，3，4，5の数字を1つずつ書いた5枚のカードがある。

この5枚のカードから同時に3枚のカードを取り出すとき，取り出した3枚のカードに書いてある数の積が3の倍数になる確率は，$\frac{\boxed{あ}}{\boxed{い}}$ である。

ただし，どのカードが取り出されることも同様に確からしいものとする。

〔問８〕　次の［　　］の中の「う」「え」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。

図２



右の図２は，線分 AB を直径とする円 O であり，２点 C，D は，円 O の周上にある点である。

４点 A，B，C，D は，右の図２のように A，C，B，D の順に並んでおり，互いに一致しない。

点 A と点 C，点 A と点 D，点 B と点 D，点 C と点 D をそれぞれ結ぶ。

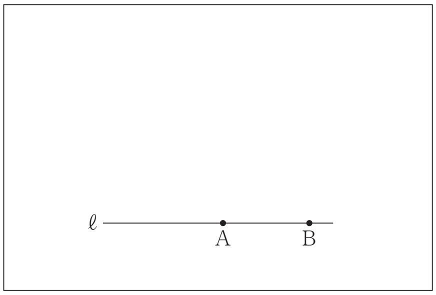
∠BAD ＝ 25° のとき，x で示した∠ACD の大きさは，［うえ］度である。

〔問９〕　右の図３で，点 A，点 B は，直線 ℓ 上にある異なる点である。

右に示した図をもとにして，AB ＝ AC，∠CAB ＝ 90° となる点 C を１つ，定規とコンパスを用いて作図によって求め，点 C の位置を示す文字 C も書け。

ただし，作図に用いた線は消さないでおくこと。

図３



2　Sさんのクラスでは，先生が示した問題をみんなで考えた。

次の各問に答えよ。

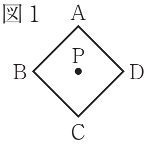
［先生が示した問題］

aを正の数，nを2以上の自然数とする。

右の図1で，四角形ABCDは，1辺$a$cmの正方形であり，点Pは，四角形ABCDの2つの対角線の交点である。

1辺$a$cmの正方形を，次の［きまり］に従って，順にいくつか重ねてできる図形の周りの長さについて考える。

図1



［きまり］

次の①～③を全て満たすように正方形を重ねる。

① 重ねる正方形の頂点の1つを，重ねられる正方形の対角線の交点に一致させる。

② 重ねる正方形の対角線の交点を，重ねられる正方形の頂点の1つに一致させる。

③ 対角線の交点は，互いに一致せず，全て1つの直線上に並ぶようにする。

正方形を順に重ねてできる図形の周りの長さは，右の図に示す太線（──）の部分とし，点線（┈┈）の部分は含まないものとする。例えば右の図2は，2個の正方形を重ねてできた図形であり，周りの長さは$6a$cmとなる。右の図3は，3個の正方形を重ねてできた図形であり，周りの長さは$8a$cmとなる。

右の図4は，正方形をn個目まで順に重ねてできた図形を表している。

図2

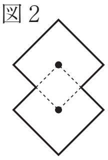


図3

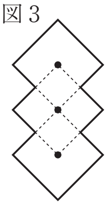
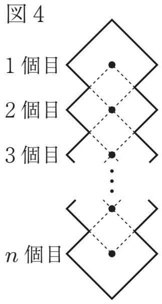


図4



1辺$a$cmの正方形をn個目まで順に重ねてできた図形の周りの長さをLcmとするとき，Lをa，nを用いて表しなさい。

Sさんは，［先生が示した問題］の答えを次の形の式で表した。Sさんの答えは正しかった。

〈Sさんの答え〉　L＝□

〔問1〕〈Sさんの答え〉の□に当てはまる式を，次のア～エのうちから選び，記号で答えよ。

ア　$4an$　　イ　$a(n+4)$　　ウ　$2a(n+2)$　　エ　$2a(n+1)$

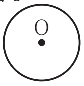
Sさんのグループは，［先生が示した問題］をもとにして，正方形を円に変え，合同な円をいくつか重ねてできる図形の周りの長さを求める問題を考えた。

［Sさんのグループが作った問題］

ℓ，r を正の数，n を2以上の自然数とする。

右の図5で，点Oは，半径 r cmの円の中心である。

図5



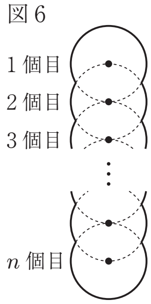
半径 r cmの円を，次の［きまり］に従って，順にいくつか重ねてできる図形の周りの長さについて考える。

［きまり］

> 次の①，②をともに満たすように円を重ねる。
> ①　重ねる円の周上にある1点を，重ねられる円の中心に一致させる。
> ②　円の中心は，互いに一致せず，全て1つの直線上に並ぶようにする。

右の図6は，円を n 個目まで順に重ねてできた図形を表している。この図形の周りの長さは，太線（⌒）の部分とし，点線（⌒）の部分は含まないものとする。

図6



半径 r cmの円を n 個目まで順に重ねてできた図形の周りの長さを M cm，半径 r cmの円の周の長さを ℓ cmとするとき，$\mathrm{M} = \dfrac{1}{3}\ell(n+2)$ となることを示してみよう。

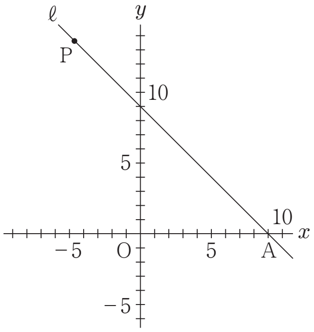
〔問2〕［Sさんのグループが作った問題］で，$\mathrm{M} = \dfrac{1}{3}\ell(n+2)$ となることを示せ。

3　右の図1で，点Oは原点，直線ℓは一次関数$y = -x + 9$のグラフを表している。

直線ℓとx軸との交点をA，直線ℓ上にある点をPとする。

次の各問に答えよ。

図1



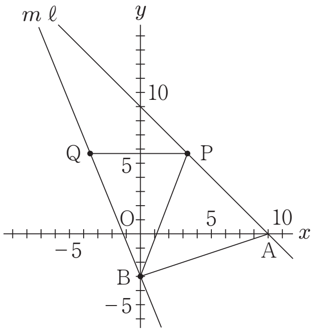
〔問1〕　次の[　　]の中の「お」「か」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。

点Pのx座標が-4のとき，点Pのy座標は，[おか]である。

〔問2〕　右の図2は，図1において，点Pのx座標が9より小さい正の数であるとき，y軸上にあり，y座標が-3である点をB，y軸を対称の軸として点Pと線対称な点をQ，2点B，Qを通る直線をmとし，点Aと点B，点Bと点P，点Pと点Qをそれぞれ結んだ場合を表している。

次の①，②に答えよ。

図2



①　点Pが点(2，7)のとき，直線mの式を，次のア～エのうちから選び，記号で答えよ。

ア　$y = -5x - 3$　　イ　$y = -3x - 5$

ウ　$y = -2x - 3$　　エ　$y = 5x - 3$

②　△BPQの面積が△BAPの面積の2倍になるとき，点Pのx座標を求めよ。

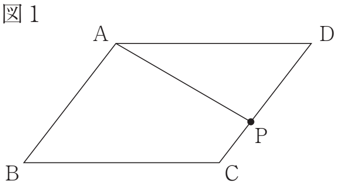
4　右の図1で，四角形ABCDは，平行四辺形である。

点Pは，辺CD上にある点で，頂点C，頂点Dのいずれにも一致しない。

頂点Aと点Pを結ぶ。

次の各問に答えよ。

図1



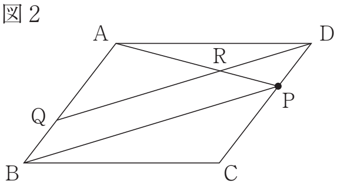
〔問1〕　図1において，∠ABC = 50°，∠DAPの大きさをa°とするとき，∠APCの大きさを表す式を，次のア～エのうちから選び，記号で答えよ。

ア　(a + 130)度　　イ　(a + 50)度　　ウ　(130 − a)度　　エ　(50 − a)度

〔問2〕　右の図2は，図1において，頂点Bと点Pを結び，頂点Dを通り線分BPに平行な直線を引き，辺ABとの交点をQ，線分APとの交点をRとした場合を表している。

次の①，②に答えよ。

図2



①　△ABP ∽ △PDRであることを証明せよ。

②　次の□の中の「き」「く」「け」「こ」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。

図2において，頂点Cと点Rを結び，線分BPと線分CRの交点をSとした場合を考える。

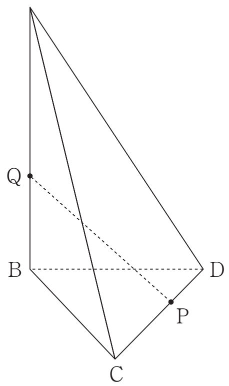
CP：PD = 2：1のとき，四角形QBSRの面積は，△AQRの面積の $\dfrac{\boxed{きく}}{\boxed{けこ}}$ 倍である。

5　右の図1に示した立体A—BCDは，AB = 9 cm，BC = BD = CD = 6 cm，∠ABC = ∠ABD = 90°の三角すいである。

辺CD上にある点をP，辺AB上にある点をQとし，点Pと点Qを結ぶ。

次の各問に答えよ。

図1



〔問1〕　次の□の中の「さ」に当てはまる数字を答えよ。

点Pが辺CDの中点，AQ = 6 cmのとき，線分PQの長さは，

[さ] cmである。

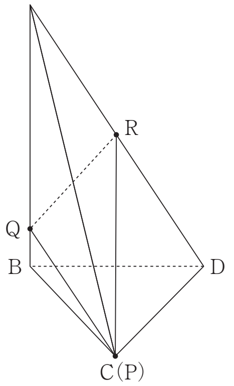
〔問2〕　次の□の中の「し」「す」「せ」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。

右の図2は，図1において，点Pが頂点Cと一致するとき，辺ADの中点をRとし，点Pと点R，点Qと点Rをそれぞれ結んだ場合を表している。

AQ = 8 cmのとき，立体R—AQPの体積は，

[しす] $\sqrt{[せ]}$ cm^{3}である。

図2



〈 ***Note*** 〉

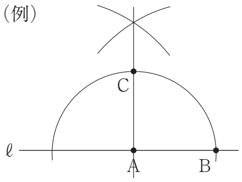
2019年度　東京都公立高校入試問題

1　〔問1〕1　〔問2〕$3a+5b$　〔問3〕$8-2\sqrt{7}$　〔問4〕-9

〔問5〕$(x=)4$　$(y=)6$　〔問6〕$\dfrac{-1\pm\sqrt{37}}{2}$

〔問7〕あ．3　い．5　〔問8〕う．6　え．5　〔問9〕(右図)

(例)



≪解説≫

〔問1〕与式$=5-4=1$

〔問2〕与式$=4a-4b-a+9b=3a+5b$

〔問3〕与式$=7-2\sqrt{7}+1=8-2\sqrt{7}$

〔問4〕$4x+6=5x+15$より，$-x=9$なので，$x=-9$

〔問5〕与式を順に①，②とする。①+②×2より，$5x=20$なので，$x=4$　これを②に代入して，$3\times4-y=6$より，$y=6$

〔問6〕解の公式より，$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times(-9)}}{2\times1}=\dfrac{-1\pm\sqrt{37}}{2}$

〔問7〕3枚のカードの取り出し方は，(1，2，3)，(1，2，4)，(1，2，5)，(1，3，4)，(1，3，5)，(1，4，5)，(2，3，4)，(2，3，5)，(2，4，5)，(3，4，5)の10通り。このうち，積が3の倍数になるのは下線をひいた6通りだから，確率は，$\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$

〔問8〕ABが直径なので，∠ADB = 90°　△ABDの内角の和より，∠ABD = 180° − (25° + 90°) = 65°　$\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$に対する円周角より，∠ACD =∠ABD = 65°

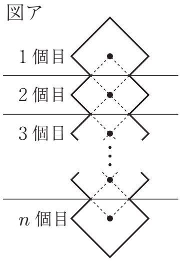
〔問9〕AB = ACより，点Cは，点Aが中心で半径がABの円の円周上にある。また，∠CAB = 90°より，点Cは，点Aを通る直線ℓの垂線上にある。よって，上図のように作図をすればよい。

2　〔問1〕エ　〔問2〕1個目とn個目の円の太線の部分の長さの合計は，$\ell\times\dfrac{240}{360}\times2$(cm)となる。また，2個目から$(n-1)$個目までの円の太線の部分の長さの合計は，$\ell\times\dfrac{60}{360}\times2\times(n-2)$(cm)となる。よって，$\mathrm{M}=\ell\times\dfrac{240}{360}\times2+\ell\times\dfrac{60}{360}\times2\times(n-2)=\ell\times\dfrac{4}{3}+\ell\times\dfrac{1}{3}\times(n-2)=\dfrac{1}{3}\times\ell\times\{4+(n-2)\}=\dfrac{1}{3}\times\ell\times(n+2)$となるから，$\mathrm{M}=\dfrac{1}{3}\ell(n+2)$

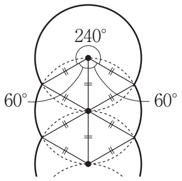
≪解説≫

〔問 1〕右図アのようにわけると，1 個目，n 個目の太線の部分の長さはそれぞれ，$a \times 2 + \dfrac{1}{2}a \times 2 = 3a$ (cm)　また，2 個目，3 個目，…，$(n-1)$個目の太線の部分の長さはそれぞれ，$\dfrac{1}{2}a \times 4 = 2a$ (cm)　2 個目から$(n-1)$個目までは，$(n-2)$個の正方形があるから，$\mathrm{L} = 3a \times 2 + 2a \times (n-2) = 6a + 2an - 4a = 2an + 2a = 2a(n+1)$

図ア



図イ



〔問 2〕右図イのように，交点と中心を結ぶ線で正三角形ができることを利用する。

3　〔問 1〕お．1　か．3　〔問 2〕① ア　② 6

≪解説≫

〔問 1〕$y = -x + 9$ に $x = -4$ を代入して，$y = -(-4) + 9 = 4 + 9 = 13$

〔問 2〕① Q $(-2,\ 7)$，B $(0,\ -3)$だから，直線 m の式は切片が-3，傾きが，$\dfrac{-3-7}{0-(-2)} = -5$　よって，$y = -5x - 3$

② P の x 座標を t とすると，P $(t,\ -t+9)$，Q $(-t,\ -t+9)$なので，$\triangle\mathrm{BPQ} = \dfrac{1}{2} \times \{t-(-t)\} \times \{-t+9-(-3)\} = \dfrac{1}{2} \times 2t \times (-t+12) = -t^2 + 12t$　また，$0 = -x + 9$ より，$x = 9$ だから，A $(9,\ 0)$　ここで，直線 ℓ と y 軸との交点を C とすると，$\triangle\mathrm{BAP} = \triangle\mathrm{ABC} - \triangle\mathrm{BCP} = \dfrac{1}{2} \times \{9-(-3)\} \times 9 - \dfrac{1}{2} \times \{9-(-3)\} \times t = 54 - 6t$　よって，$-t^2 + 12t = 2 \times (54 - 6t)$となればよい。整理して，$t^2 - 24t + 108 = 0$ より，$(t-6)(t-18) = 0$　$0 < t < 9$ なので，$t = 6$

4　〔問 1〕イ　〔問 2〕① △ABP と△PDR において，四角形 ABCD は平行四辺形だから，AB ∥ DC　平行線の錯角は等しいから，∠PAB = ∠RPD……(i)　仮定から，BP ∥ QD　平行線の錯角は等しいから，∠APB = ∠PRD……(ii)　(i)，(ii)より，2 組の角がそれぞれ等しいから，△ABP ∽△PDR　② き．1　く．3　け．1　こ．2

≪解説≫

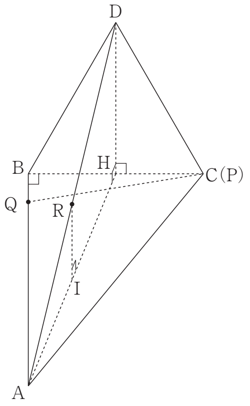
〔問 1〕平行四辺形の性質より，∠ADP = ∠ABC = 50°　△ADP の内角と外角の関係より，∠APC = ∠DAP + ∠ADP = a° + 50°

〔問 2〕② DR ∥ PS より，DR : PS = CD : CP = 3 : 2 で，△PDR と△PRS は底辺を DR，PS とすると高さが等しいので，△PDR : △PRS = DR : PS = 3 : 2　これより，△PDR の面積を s とすると，△PRS = $\dfrac{2}{3}s$　次に，四角形 BPDQ は平行四辺形になるから，

BQ = PD であり，AQ = CP とわかる。①より，△ABP ∽△PDR で，QR ∥ BP より，△AQR ∽△ABP だから，△ABP：△AQR：△PDR = $AB^2:AQ^2:PD^2 = CD^2:CP^2:PD^2 = 3^2:2^2:1^2 = 9:4:1$　よって，四角形 BPRQ =△ABP −△AQR = $9s - 4s = 5s$ で，四角形 QBSR =四角形 BPRQ −△PRS = $5s - \frac{2}{3}s = \frac{13}{3}s$ だから，四角形 QBSR の面積は△AQR の，$\frac{13}{3}s \div 4s = \frac{13}{12}$（倍）

5 〔問 1〕6 〔問 2〕し．1　す．2　せ．3

≪解説≫

〔問 1〕△BCD は正三角形だから，△BCP は 30°，60°の直角三角形。よって，BP = $\frac{\sqrt{3}}{2}$BC = $3\sqrt{3}$（cm）　QB = 9 − 6 = 3（cm）より，△QBP で三平方の定理から，PQ = $\sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 3^2} = 6$（cm）

〔問 2〕AB ⊥面 BCD だから，面 ABC ⊥面 BCD　これより，D から BC に垂線をひき交点を H とすると，右図のように，DH は三角すい A—BCD で底面を△ABC としたときの高さになる。このとき，DH = $3\sqrt{3}$cm で，R から面 ABC に垂線をひき交点を I とすると，RI ∥ DH より，RI：DH = AR：AD = 1：2 だから，RI = $\frac{1}{2}$DH = $\frac{3\sqrt{3}}{2}$（cm）　△AQP = $\frac{1}{2} \times 8 \times 6$ = 24（cm^2）だから，立体 R—AQP の体積は，$\frac{1}{3} \times 24 \times \frac{3\sqrt{3}}{2}$ = $12\sqrt{3}$（cm^3）